Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2I_3$.

b) Cum $A(A - I_3) = (A - I_3)A = 2I_3$ rezultă că $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.

c) $A^2 + A = 2(A + I_2) \Rightarrow A^3 + A^2 = 2^2(A + I_3)$. Prin inducție rezultă concluzia.

2. a) Se folosește definiția elementului neutru.

b) Deoarece $\begin{cases} f(3) = 0 \\ f(4) = 1 \end{cases}$, obținem $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$ şi se verifică apoi faptul că funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 3$ este izomorfismul căutat.

c) Se demonstrează prin inducție că $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 2009 ori } x} = (x-3)^{2009} + 3$.

Se obțin apoi soluția $x = 5$.